សមាគមគណិតវិទ្យាកម្ពុជា

Mathematical Association of Cambodia

ទ្រឹស្តីបទវិមាត្រ

អ ត្ថ ប ទ ព ង្រី ក ចំ ណេះ ដឹ ង

ពីជគណិតលីនេអ៊ែរ

សិក្សា និងរៀបរៀងដោយ **ផាន់ គឹមសៀ**

សមាជិក **M.A.C.** ជំនាន់ទី 1

October 22, 2021

វត្ថុបំណង

ក្នុងអត្ថបទនេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីទ្រឹស្តីបទវិមាត្រ ឬទ្រឹស្តីបទ rank-nullity ដែលនិយាយអំពីទំនាក់ទំនង range space និង null space ។ ប៉ុន្តែ មុននឹងស្វែងយល់ពីទ្រឹស្តីបទវិមាត្រក្នុងអត្ថបទនេះ យើងសូមណែនាំអំពីវត្ថុមួយចំនួនដែលត្រូវការ។

1 លំហវ៉ិចទ័រ (Vector space)

និយមន័យ 1.1 (លំហវ៉ិចទ័រ)

លំហវ៉ិចទ័រ (ឬ លំហលីនេអ៊ែរ) V លើកាយ $\mathbb{F}$ ជាសំណុំមិនទទេដែលផ្ទុកជាតុហៅថា **វ៉ិចទ័រ** ហើយប្រដាប់ដោយ៖

1. ប្រមាណវិធីបូក (addition)៖ គូនៃជាតុ $u, v \in V$ គេបាន $u + v \in V$ ជាជាតុតែមួយគត់។
2. ប្រមាណវិធីគុណស្កាលែ (scalar multiplication)៖ គ្រប់ $a \in \mathbb{F},\ u \in V$ គេបាន $au \in V$ ជាជាតុតែមួយគត់។

លើសពីនេះទៀត ប្រមាណវិធីទាំងពីរនេះផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម៖

1. $(V, +)$ មានលក្ខណៈជាក្រុមត្រឡប់៖
   - $\forall u, v \in V : u + v = v + u$, (លក្ខណៈត្រឡប់) ។
   - $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$, (លក្ខណៈផ្តុំ) ។
   - $\forall u \in V : u + 0 = u$, ($0$ ជាវ៉ិចទ័រសូន្យតែមួយគត់ក្នុង V) ។
   - $\forall u \in V, \exists(-u) \in V$ ដែល $u + (-u) = 0$។
2. កាយ $\mathbb{F}$ មានអំពើលើ V ចំពោះប្រមាណវិធីគុណស្កាលែ
   - $\forall u \in V$ ដែល $1 \cdot u = 1u = u$ ។
   - $\forall a, b \in \mathbb{F}$ និង $\forall u \in V$ ដែល $(ab)x = a(bx)$ ។
3. ប្រមាណវិធីគុណស្កាលែមានលក្ខណៈបំបែកចំពោះប្រមាណវិធីបូក៖
   - $\forall a \in \mathbb{F}$ និង $\forall u, v \in V$ ដែល $a(u + v) = au + av$ ។
   - $\forall a, b \in \mathbb{F}$ និង $\forall u \in V$ ដែល $(a + b)u = au + bu$ ។

សំគាល់៖ **វ៉ិចទ័រមួយក្នុងលំហ** គឺជាអង្កត់ដែលមានតម្លៃនិងទិសដៅជាក់លាក់ក្នុងលំហ។

ឧទាហរណ៍ 1.1. $\{0\}$ ជាលំហវ៉ិចទ័រតូចបំផុត ។

ឧទាហរណ៍ 1.2. សំណុំនៃគ្រប់ $n-$tuple ជាមួយនឹងជាតុក្នុងកាយ $\mathbb{F}$ តាងដោយ $\mathbb{F}^n$។ សំណុំនេះជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{F}$ ជាមួយប្រមាណវិធីបូកកូអរដោនេ និងផលគុណស្កាលែ។
ប្រសិនបើ $u = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n,\ v = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{F}^n$ និង $c \in \mathbb{F}$ នោះ៖

- $u+v=(a_1+b_1, a_2+b_2, ..., a_n+b_n)$ ។
- $cu=(ca_1, ca_2, ..., ca_n)$ ។

លើសពីនេះទៀត បើកាយ $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ឬ $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, លំហវ៉ិចទ័រ V ហៅថា លំហវ៉ិចទ័រនៃចំនួនពិត (real vector space) ឬ លំហវ៉ិចទ័រនៃចំនួនកុំផ្លិច (complex vector space) រៀងគ្នា។

និយមន័យ 1.2 (លំហវ៉ិចទ័ររង)

សំណុំរង W មិនទទេរនៅក្នុងលំហវ៉ិចទ័រ V លើកាយ $\mathbb{F}$ ហៅថា លំហរង (subspace) នៃ V លុះត្រាតែ W ស្ថាបចំពោះប្រមាណវិធីបូក និងប្រមាណវិធីគុណស្កាលែនៃលំហវ៉ិចទ័រ V ។ មានន័យថា

$$W \leq V \iff \begin{cases} \forall w_1, w_2 \in W : w_1+w_2 \in W \\ \forall a \in \mathbb{F}, w \in W : aw \in W \end{cases} \quad ។$$

សំគាល់៖ លំហរងនៃលំហវ៉ិចទ័រ V លើកាយ $\mathbb{F}$ ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{F}$ ។

2 គោល និងវិមាត្រ (**Bases and Dimension)**

និយមន័យ 2.1 (គោល)

គេមាន V ជាលំហវ៉ិចទ័រ។ គោល β មួយនៃ V គឺជាសំណុំរងនៃ V ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌពីរដូចខាងក្រោម៖

1. β ជាសំណុំរងមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃវ៉ិចទ័រក្នុង V មានន័យថា

$$\sum_{v_i \in \beta} a_i v_i = 0 \ \text{ទាញបាន} \ a_i = 0, \quad \forall i \quad ។$$

2. β បង្ក V មានន័យថា គ្រប់ធាតុរបស់ V អាចសរសេរទៅជាបន្សំលីនេអ៊ែរនៃធាតុរបស់ β ។ ក្នុងន័យគណិតវិទ្យាគឺ

$$\forall v \in V, \exists a_1, ..., a_k \in \mathbb{F}, v_1, ..., v_k \in \beta : v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \quad ។$$

ឧទាហរណ៍ 2.1. គេមានកាយ $\mathbb{R}$ និង S ជាសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}^n$ ដែលផ្ទុកវ៉ិចទ័រ $e_1, e_2, ..., e_n$ កំណត់ដោយ

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,...,0) \\ e_2 &= (0,1,0,...,0) \\ \vdots & \quad \vdots \\ e_n &= (0,0,0,...,1) \ ។ \end{aligned}$$

នោះគ្រប់ $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ គេបាន

$$\begin{aligned}x&=(x_1,...,x_n)\\&=x_1(1,0,...,0)+x_2(0,1,0,...,0)+...+x_n(0,0,...,1)\\&=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n\end{aligned}$$

នាំឱ្យ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ បង្ក $\mathbb{R}^n$។
បើ $x=0$ និង $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}^n$ គេបាន

$$x=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0$$

ទាញបាន

$$a_i=0,\quad\forall i$$

នោះ វ៉ិចទ័រ $x_1,x_2,...,x_n$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។
តាមលក្ខខណ្ឌពីរខាងលើ ដូចនេះ $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ គឺជាគោលនៃ $\mathbb{R}^n$។

សំគាល់៖ គោលរបស់លំហវ៉ិចទ័រ មិនមែនមានតែមួយទេ ឬលំហវ៉ិចទ័រមួយអាចមានគោលច្រើនលើសពីមួយ ឬអាចមានគោលរាប់មិនអស់។

និយមន័យ 2.2 (វិមាត្រ)

លំហវ៉ិចទ័រមួយមានវិមាត្រកំណត់ (finite dimension) លុះត្រាតែវាមានគោលមួយដែលផ្ទុកចំនួនវ៉ិចទ័រកំណត់។ ចំនួនតែមួយគត់នៃវ៉ិចទ័រក្នុងគោលចំពោះ V ហៅថា វិមាត្រ (dimension) នៃ V និងតាងដោយ $\dim(V)$ ។

ឧទាហរណ៍ 2.2. .

1. លំហវ៉ិចទ័រ $\{0\}$ មានវិមាត្រសូន្យ ។
2. លំហវ៉ិចទ័រ $\mathbb{F}^n$ មានវិមាត្រ n ។

ទ្រឹស្តីបទ 2.1 (វិមាត្រនៃលំហរង)

គេមាន W ជាលំហរងនៃលំហវ៉ិចទ័រដែលមានវិមាត្ររាប់អស់ V ។ គេបាន W ជាវិមាត្ររាប់អស់ និង $\dim(W)\leq\dim(V)$។ ម្យ៉ាងវិញបើ $\dim(W)=\dim(V)$ នោះ $V=W$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់. គេមាន $\dim(V)=n$។ ប្រសិនបើ $W=\{0\}$ នោះ W មានវិមាត្ររាប់អស់ដែល $\dim(W)=0\leq n$។
ម្យ៉ាងវិញ បើ W ផ្ទុកឯកជាតុខុសពីសូន្យ v_1 ដូចនេះ $\{v_1\}$ គឺជាសំណុំមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។
យើងបន្តឱ្យ $v_1,v_2,...,v_k\in W$ ដែល $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ គឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។ ដោយសារតែគ្មានសំណុំរងមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ V អាចផ្ទុកជាតុច្រើនជាង n វ៉ិចទ័រ នោះយើងកំណត់យក $k\leq n$ និង $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ គឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។
ម្យ៉ាងវិញ $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ បង្ក W នោះវាជាគោលនៃ W ។
ដូចនេះ

$$\dim(W)=k\leq n\text{ ។}$$

ប្រសិនបើ $\dim(W)=n$ នោះគោលនៃ W ជាសំណុំរងមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ V ដែលផ្ទុក n វ៉ិចទ័រ។
គេបាន $\dim(V)=\dim(W)=n$ នោះមានន័យថា $V=W$ ។ ■

ទ្រឹស្តីបទ 2.2

ប្រសិនបើ W ជាលំហរងនៃលំហវ៉ិចទ័រដែលមានវិមាត្ររាប់អស់ V នោះគោលនៃ W អាចពង្រីកក្លាយជាគោលនៃ W ។

សម្រាយបញ្ជាក់. ឧបមាថា $S = \{u_1, ..., u_m\}$ ជាសំណុំរងមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរនៃ W។

- ប្រសិនបើ S បង្ក W គេបាន S ជាគោលនៃ W ។
- ប្រសិនបើ S មិនបង្ក W ទេ នោះ $W \neq \text{span}(S)$ ។

គេមាន $v = \{v_1, v_2, ..., v_m\} \in W$ ដែល $v \neq \text{span}(S)$
ដោយសារតែ S មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ នោះ

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i = 0 \Longrightarrow a_i = 0, \quad \forall i$$

ឧបមាថា

$$bv + \sum_{i=1}^{m} a_i u_i = 0 \Longrightarrow v = -\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

- ប្រសិនបើ $b \neq 0$ នោះ $v \in span(S)$ ។
- ប្រសិនបើ $b = 0$ និងមាន $a_i = 0$ ដូចនេះ $S \cup \{v\}$ មិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ ។

យើងនឹងស្រាយថា $S \cup \{v\}$ បង្ក W
ដោយ $S = \{u_1, ..., u_m\}$ និង $v = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$
ចំពោះ $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m \in \mathbb{F}$ ដែល

$$a_1 u_1 + ... + a_m u_m + b_1 v_1 + ... + b_m v_m = 0$$

$$u_1 = (-a_1^{-1} a_2) u_2 + ... + (-a_1^{-1} a_m) u_m + (-a_1^{-1} b_1) v_1 + ... + (-a_1^{-1} b_m) v_m$$

នាំឱ្យ

$$u_1 \in \text{span}\left(S' \cup v\right) \text{ ដែល } S' = \{u_2, ..., u_m\} \subset S$$

ដូច្នេះ គ្រប់ជាតុក្នុង $S \cup \{v\}$ អាចសរសេរដូច u_1 មានន័យថា

$$\{u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_m\} \text{ បង្ក } W$$

ហេតុនេះ $S \cup \{v\}$ បង្ក W គេបាន $S \cup \{v\}$ ជាគោលនៃ W ។
ដូចនេះ គោលនៃ W ដែលជាលំហរងនៃលំហវ៉ិចទ័រ V អាចពង្រីកក្លាយជាគោលនៃ W ។ ■

3 បម្លែងលីនេអ៊ែរ, **null spaces**, និង សំណុំរូបភាព

3.1 បម្លែងលីនេអ៊ែរ (**Linear Transformations**)

និយមន័យ 3.1 (បម្លែងលីនេអ៊ែរ)

គេឱ្យ V និង W ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{F}$។ អនុគមន៍ $T : V \to W$ ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរពី V ទៅ W លុះត្រាតែចំពោះគ្រប់ $u, v \in V$ និង $c \in \mathbb{F}$ ដែល

$$T(cu + v) = cT(u) + T(v) \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ 3.1. គេកំណត់

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ ដោយ } T(a_1, a_2) = (2a_1 + a_2, a_1) \text{ ។}$$

គេឱ្យ $c \in \mathbb{R}$ និង $u, v \in \mathbb{R}^2$ ដែល $u = (x_1, x_2)$ និង $v = (y_1, y_2)$
ដោយសារ

$$cu + v = (cx_1 + y_1, cx_2 + y_2)$$

គេបាន

$$\begin{aligned} T(cu + v) &= T(cx_1 + y_1, cx_2 + y_2) \\ &= (2(cx_1 + y_1) + cx_2 + y_2, cx_1 + y_1) \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងវិញ

$$\begin{aligned} cT(u) + T(v) &= c\,(2x_1 + x_2, x_1) + (2y_1 + y_2, y_1) \\ &= (2cx_1 + cx_2 + 2y_1 + y_2, cx_1 + y_1) \\ &= (2(cx_1 + y_1) + cx_2 + y_2, cx_1 + y_1) \end{aligned}$$

គេបាន

$$T(cu + v) = cT(u) + T(v)$$

ដូចនេះ T ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ ។

3.2 **Null space** និង សំណុំរូបភាព

និយមន័យ 3.2

គេមាន V និង W ជាលំហវ៉ិចទ័រ និងកំណត់ $T : V \to W$ ជាលីនេអ៊ែរ ។

- Null space (ឬ kernel) តាងដោយ $N(T)$ គឺជាសំណុំនៃគ្រប់វ៉ិចទ័រ $u \in V,\ T(u) = 0$ ។ កំណត់សរសេរ
$$N(T) = \{u \in V \mid T(u) = 0\} \text{ ។}$$
- សំណុំរូបភាព (Range) (ឬ image) តាងដោយ $R(T)$ ជាសំណុំរងនៃ W ដែលផ្ទុកគ្រប់រូបភាពនៃវ៉ិចទ័រក្នុង V ។ កំណត់សរសេរ
$$R(T) = \{T(u) \mid u \in V\} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ 3.2. គេឱ្យ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ ដែលកំណត់ដោយ

$$T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 2a_2, 3a_3)$$

នោះ

$$N(T) = \{(2a, a, 0) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$$

ព្រោះ

$$T(2a, a, 0) = (2a - 2a, 0) = (0, 0)$$

និង

$$R(T) = \mathbb{R}^2$$

ព្រោះរូបភាពនៃ $\mathbb{R}^3$ គឺ $\mathbb{R}^2$ ដែលមានពីរកំប៉ូសង់ (Component) ។

ទ្រឹស្តីបទ 3.1

គេមាន V និង W ជាលំហវ៉ិចទ័រ និងកំណត់ $T : V \to W$ ជាលីនេអ៊ែរ។ យើងបាន $N(T)$ និង $R(T)$ គឺជាលំហរងនៃ V និង W រៀងគ្នា ។

សម្រាយបញ្ជាក់. តាង 0_V និង 0_W ជាវ៉ិចទ័រសូន្យនៃ V និង W រៀងគ្នា ។
ករណី $T(0_V) = 0_W$ គេបាន $0_V \in N(T)$ ។
តាង $u, v \in N(T)$ និង $a \in \mathbb{F}$ នោះ

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(u) + T(v) \\ &= 0_W + 0_W \\ &= 0_W \end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned} T(au) &= aT(u) \\ &= a0_W \\ &= 0_W \end{aligned}$$

ដូចនេះ $u, v \in N(T)$ និង $a \in \mathbb{F}$ កំណត់បាន $N(T)$ ជាលំហរងនៃ V ។
ដោយសារតែ $T(0_v) = 0_w$ គេបាន $0_W \in R(T)$ ។
តាង $u, v \in R(T)$ និង $a \in \mathbb{F}$ នោះមាន $x, y \in V$ ដែល $T(x) = u$ និង $T(y) = v$ ។
ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y) \\ &= u + v \end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned} T(ax) &= aT(x) \\ &= au \end{aligned}$$

ដូចនេះ $u, v \in R(T)$ និង $a \in \mathbb{F}$ កំណត់បាន $R(T)$ ជាលំហរងនៃ W ។ ■

ទ្រឹស្តីបទ 3.2

គេមាន V និង W ជាលំហវ៉ិចទ័រ និង $T : V \to W$ ជាលីនេអ៊ែរ។ បើ $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ជាគោលនៃ V នោះ

$$R(T) = \text{span}(T(\beta)) = \text{span}\left(\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}\right) \text{ ។}$$

សម្រាយបញ្ជាក់. ឧបមាថា $w \in R(T)$ នោះ $w = T(v), \quad \forall v \in V$។
ដោយដឹងថា β ជាគោលនៃ V យើងបាន

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{F}$$

ដោយសារតែ T ជាលីនេអ៊ែរ នោះ

$$w = T(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i) \in \text{span}(T(\beta))$$

ម្យ៉ាងវិញ $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ នោះ

$$\text{span}(T(\beta)) = \text{span}\left(\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}\right)$$

គេបាន

$$R(T) = \text{span}(T(\beta)) = \text{span}\left(\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}\right), \quad \text{ព្រោះ } w \in R(T)$$

■

និយមន័យ 3.3

គេមាន V និង W ជាលំហវ៉ិចទ័រ និងកំណត់ $T : V \to W$ ជាលីនេអ៊ែរ ។ ប្រសិនបើ $N(T)$ និង $R(T)$ មានវិមាត្ររាប់អស់ នោះយើងកំណត់

1. Nullity នៃ T កំណត់សរសេរ nullity(T) ជាវិមាត្រនៃ $N(T)$ ។
2. Rank នៃ T កំណត់សរសេរ rank(T) ជាវិមាត្រនៃ $R(T)$ ។

4 ទ្រឹស្តីបទវិមាត្រ (**Dimension Theorem)**

ទ្រឹស្តីបទ 4.1 (ទ្រឹស្តីបទវិមាត្រ)

គេមាន V និង W ជាលំហវ៉ិចទ័រលើកាយ $\mathbb{F}$ និង $T : V \to W$ ជាលីនេអ៊ែរ។ ឧបមាថា V មានវិមាត្ររាប់អស់ នោះ

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V) \text{ ។}$$

សម្រាយបញ្ជាក់. ឧបមាថា $\dim(V) = n$, $\dim(N(T)) = k$ និង $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ ជាគោលនៃ $N(T)$។
ដោយដឹងថា $N(T) \subseteq V$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ 2.2 យើងពង្រីក $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ ជាគោលតាងដោយ

$$\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \text{ នៃ } V \text{ ។}$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $S = \{T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), ..., T(v_n)\}$ ជាគោលនៃ $R(T)$ ។
ដំបូងបង្ហាញថា S span $R(T)$។ តាមទ្រឹស្តីបទ 3.2 និង $T(v_i) = 0$ ព្រោះ $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ ជាគោលនៃ $N(T)$
ចំពោះ $1 \leq i \leq k$ យើងមាន

$$\begin{aligned} R(T) &= \text{span}\left(\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}\right) \\ &= \text{span}\left(\{T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), ..., T(v_n)\}\right) \\ &= \text{span}(S) \end{aligned}$$

ឥឡូវយើងបង្ហាញថា S គឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។ ឧបមាថា

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i T(v_i) = 0 \text{ ចំពោះ } b_{k+1}, b_{k+2}, ..., b_n \in \mathbb{F}$$

ដោយ T ជាលីនេអ៊ែរ នោះយើងអាចប្រើលក្ខណៈ $T(cu) = cT(u)$ ចំពោះ $u \in V,\ c \in \mathbb{F}$ គឺ

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{n} b_i v_i\right) = 0$$

ដូចនេះ

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i v_i \in N(T) \text{ ។}$$

ហេតុនេះ ចំពោះ $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{F}$ ដែល

$$\sum_{i=k+1}^{n} b_i v_i = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} (-c_i) v_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_i v_i = 0$$

ដោយសារតែ β ជាគោលនៃ V នោះ $b_i = 0,\ \forall i$។ ហេតុនេះ S គឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ។
ដូច្នេះ $S = \{T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), ..., T(v_n)\}$ ជាគោលនៃ $R(T)$ ។
ដូចនេះ សំណុំរូបភាពមានវិមាត្រ $\text{rank}(T) = n - k$
ដោយយើងបានតាង $\dim(V) = n$, $\dim(N(T)) = \text{nullity}(T) = k$
គេបាន

$$\text{rank}(T) = \dim(V) - \text{nullity}(T)$$

ដូច្នេះ

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V) \text{ ។}$$

■

ជាក់ស្តែងដូចឧទាហរណ៍ 3.2 យើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទវិមាត្រលើបម្លែងលីនេអ៊ែរ T ដែលមាន $\dim(V) = 3$ និង $\text{rank}(T) = 2$ ដើម្បីរក $\text{nullity}(T)$ បានតាមរយៈ

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

នាំឱ្យ

$$\text{nullity}(T) = \dim(V) - \text{rank}(T) = 1 \text{ ។}$$

4.1 ការអនុវត្តន៍លើទ្រឹស្តីបទវិមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ 4.2

គេមាន V និង W ជាលំហវ៉ិចទ័រ និងឱ្យ $T : V \to W$ ជាលីនេអ៊ែរ។ គេបាន T ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ (one-to-one) លុះត្រាតែ $N(T) = 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់. .
ឧបមាថា T ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ និង $u \in N(T)$។
គេបាន

$$T(u) = 0 = T(0)$$

ដោយសារ T ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ និងមាន $u = 0$ ដូច្នេះ $N(T) = \{0\}$ ។
ឥឡូវសន្មត $N(T) = 0$ និងឧបមាថា $T(u) = T(v)$។ គេបាន

$$0 = T(u) - T(v) = T(u - v)$$

តាមលក្ខណៈនៃបម្លែងលីនេអ៊ែរ T ។
ដូចនេះ $x - y \in N(T) = \{0\}$ ដែលទាញបាន $x - y = 0$ ឬ $x = y$ ។
នេះមានន័យថា T ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។ ■

ទ្រឹស្តីបទ 4.3

គេមាន V និង W ជាលំហវ៉ិចទ័រដែលមានវិមាត្រកំណត់និងស្មើគ្នា និង $T : V \to W$ ជាលីនេអ៊ែរ។ នោះសំណើរទាំងបីខាងក្រោមជាសំណើរសមមូលគ្នា។

1. T ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។
2. T ជាអនុវត្តន៍ពេញ ។
3. $\text{rank}(T) = \dim(V)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់. ប្រើទ្រឹស្តីបទ 4.2 ខាងលើ យើងបាន T ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយលុះត្រាតែ $N(T) = \{0\}$ ។
ដោយសារតែ $N(T) = 0$ លុះត្រាតែ $\text{nullity}(T) = 0$ ។
តាមទ្រឹស្តីបទវិមាត្រ យើងមាន

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

នាំឱ្យ

$$\text{rank}(T) = \dim(V)$$

លុះត្រាតែ
$$\text{rank}(T) = \dim(W)$$
ព្រោះគេមាន
$$\dim(V) = \dim(W)$$
លុះត្រាតែ
$$\dim(R(T)) = \dim(W)$$
តាមទ្រឹស្តីបទ 2.1 គេបាន
$$R(T) = W$$
ដូច្នេះ T ជាអនុវត្តន៍ពេញ។
សរុបមក សំណើរទាំងបីសមមូលគ្នាទៅវិញទៅមក។ ■

ឧទាហរណ៍ 4.1. តាង $P_n(\mathbb{R})$ ជាសំណុំនៃពហុធាដែលមានដឺក្រេយ៉ាងច្រើន n ។
សំណុំនេះជាលំហវ៉ិចទ័រ ជាមួយនឹងប្រមាណវិធីបូក និងប្រមាណវិធីគុណស្កាលែកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

- ប្រមាណវិធីបូក៖ គេមាន $f(x), g(x) \in P_n(\mathbb{R})$ គេបាន $f(x) + g(x) \in P_n(\mathbb{R})$
- ប្រមាណវិធីគុណស្កាលែ៖ គ្រប់ $a \in \mathbb{R},\ f(x) \in P_n(\mathbb{R})$ គេបាន $af(x) \in P_n(\mathbb{R})$ ។

យើងពិនិត្យអនុគមន៍ $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ ជាបម្លែងលីនេអ៊ែរ កំណត់ដោយ
$$T(f(x)) = 2f^{'}(x) + \int_0^x 3f(t)dt \text{ ។}$$
សិក្សាបម្លែងលីនេអ៊ែរ T ។
ដោយ $P_2(\mathbb{R}) = ax^2 + bx + c$ មានគោល $\{1, x, x^2\}$ នៃ $P_2(\mathbb{R})$
តាមទ្រឹស្តីបទ 3.2 គេបាន
$$R(T) = \text{span}(\{T(1), T(x), T(x^2)\})$$
គេមាន
$$\begin{aligned} T(1) &= 2(1)' + \int_0^x 3dt \\ &= 3x \\ T(x) &= 2x^{'} + \int_0^x 3xdt \\ &= 2 + \frac{3}{2}x^2 \\ T(x^2) &= 2(x^2)^{'} + \int_0^x 3x^2dt \\ &= 4x + x^3 \end{aligned}$$
គេបាន
$$R(T) = \text{span}\left(\left\{3x, 2 + \frac{3}{2}x^2, 4x + x^3\right\}\right)$$

ដោយសារតែ $\{3x, 2 + \frac{3}{2}x^2, 4x + x^3\}$ គឺមិនអាស្រ័យលីនេអ៊ែរ នោះកំណត់បាន rank$(T) = 3$ ។
ដោយដឹងថា dim$(P_3(\mathbb{R})) = 4$ នោះ T មិនមែនជាអនុវត្តន៍ពេញ ព្រោះ rank$(T) \neq dim(P_3(\mathbb{R}))$ ។
តាមទ្រឹស្តីបទវិមាត្រ យើងមាន

$$\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = \dim(V)$$

នាំឱ្យ

$$\text{nullity}(T) = 3 - 3 = 0$$

ដូចនេះ

$$N(T) = \{0\}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ 4.2 ទាញបាន T ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។

References

[1] **Kenneth Hoffman**, *Linear Algebra*. Second Edition, Prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey. 1971.

[2] **Stephen H. Friedberg**, *Linear Algebra*. Fourth Edition, Pearson Education, Inc. 2003.